ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

calculator.gr

Ιδιότητες πράξεων (αξιωματικές)

calculator.gr

Ιδιότητα	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμός**
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετο/Αντίστροφο Στοιχείο	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1 \quad (\alpha\neq 0)$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

Απόλυτη τιμή

calculator.gr

- Ορίζουμε ως **απόλυτη τιμή** ενός αριθμού x και την συμβολίζουμε $|x|$, τον ίδιο τον αριθμό αν αυτός είναι θετικός ή μηδέν και τον αντίθετό του αν αυτός είναι αρνητικός. Δηλαδή

$$|x| \overset{\text{ορ}}{=} \begin{cases} x, & \text{αν} \quad x\geq 0 \\ -x, & \text{αν} \quad x<0 \end{cases}$$

- Γεωμετρικά ερμηνεύεται ως η απόσταση του σημείου $M(x)$ από την αρχή $O(0)$ του πραγματικού άξονα.

Ιδιότητες Κλασμάτων

calculator.gr

$$\frac{\alpha}{1}=\alpha \qquad \frac{0}{\alpha}=0 \qquad \frac{\alpha}{\alpha}=1 \qquad \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma} \qquad -\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{-\beta} \qquad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma} \qquad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta} \qquad \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta} \qquad \alpha\cdot\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma} \qquad \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma} \qquad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\alpha\delta=\beta\gamma \qquad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta} \qquad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta} \qquad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \qquad \frac{\alpha_1}{\beta_1}=\cdots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\lambda\Rightarrow\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu}=\lambda$$

Δύναμη αριθμού με εκθέτη ακέραιο

calculator.gr

- **Η Δύναμη** με βάση $\alpha\in\mathbb{R}$ και εκθέτη $\kappa\in\mathbb{Z}$, συμβολίζεται α^κ και ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \alpha^0=1 \quad (\alpha\neq 0) \\ \alpha^1=\alpha \\ \alpha^\kappa=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\kappa \text{ παράγοντες}} \quad (\kappa>1) \\ \alpha^\kappa=\frac{1}{\alpha^{-\kappa}} \quad (\alpha\neq 0,\ \kappa<0) \end{cases}$$

- **Ιδιότητες Δυνάμεων**

$\boxed{\alpha^\nu \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}}$ $\boxed{\alpha^\nu \beta^\nu = (\alpha\beta)^\nu}$ $\boxed{(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu\mu}}$ $\boxed{\dfrac{\alpha^\nu}{\alpha^\mu} = \alpha^{\nu-\mu}}$ $\boxed{\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}$ $\boxed{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu}$

- **Παρατηρήσεις** $(\nu \in \mathbb{N})$

$\boxed{1^\nu = 1}$ $\boxed{\begin{matrix}0^\nu = 0\\ (\nu \neq 0)\end{matrix}}$ $\boxed{10^\nu = 1\underbrace{0000\cdots0}_{\nu \text{ μηδενικά}}}$ $\boxed{10^{-\nu} = 0.\underbrace{0000\cdots01}_{\nu \text{ ψηφία}}}$ $\boxed{(-1)^k = \begin{cases}1, & k \text{ άρτιος ακέραιος}\\ -1, & k \text{ περιττός ακέραιος}\end{cases}}$

Ρίζες

calculator.gr

- **Τετραγωνική ρίζα** (ή απλώς **ρίζα**) ενός θετικού αριθμού $\alpha > 0$, λέγεται ο θετικός αριθμός $\beta > 0$, ο οποίος αν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α και συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$. Ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$
  Δηλαδή $\sqrt{\alpha} = \beta \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \beta^2 = \alpha, \quad$ όπου $\alpha, \beta \geq 0$
  Δηλ. είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha \quad (\alpha \geq 0)$.

- **Ιδιότητες Ριζών**

$\boxed{\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}$ $\boxed{\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}}$ $\boxed{(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha}$ $\boxed{\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|}$ $\boxed{\sqrt{\alpha^2\beta} = |\alpha|\sqrt{\beta}}$

Μονώνυμα

calculator.gr

- **Αριθμητική παράσταση** είναι μία μαθηματική έκφραση (παράσταση) που περιέχει πράξεις με αριθμούς.
  π.χ. $5 \cdot 7^2 - 3 \cdot \dfrac{2}{3^2 - 1}$

- **Αλγεβρική παράσταση** είναι μία μαθηματική έκφραση (παράσταση) που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές.
  π.χ. $4\alpha - 7\beta x, \quad \alpha\delta + \epsilon, \quad \dfrac{3x - 2y}{x + 8yz}$

- **Ακέραια αλγεβρική Παράσταση** λέγεται η αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.
  π.χ. $\dfrac{1 - \sqrt{3}}{5} xy^2 - x^2 + \sqrt{2}xy + 1$

- **Μονώνυμο** λέγεται κάθε ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού. (οι αριθμοί θεωρούνται μονώνυμα)
  π.χ. $\alpha\beta z, \quad (1 - \sqrt{5})x^4yz^2, \quad \dfrac{\pi + 1}{2}\alpha\beta\gamma^3, \quad 3\sqrt{5}xy^5$

- **Συντελεστής ενός μονωνύμου** λέγεται ο αριθμητικός παράγοντας του μονωνύμου.
  π.χ. $\underbrace{-\dfrac{3}{4}}_{\text{συντελεστής}} x^2y, \quad \underbrace{2(\pi + 1)}_{\text{συντελεστής}}\alpha^3\beta^2, \quad \underbrace{1}_{\text{συντελεστής}} xyz^4, \quad \underbrace{3\sqrt{5}}_{\text{συντελεστής}} x^2$

- **Κύριο μέρος του μονωνύμου** λέγεται το γινόμενο όλων των μεταβλητών του μονωνύμου μαζί με τους εκθέτες τους (δηλαδή το μονώνυμο χωρίς τον αριθμητικό παράγοντα).
  π.χ. $-\dfrac{2}{5}\underbrace{x^3y^2z}_{\text{κύριο μέρος}}, \quad -12\underbrace{\alpha\beta^2}_{\text{κύριο μέρος}}, \quad \dfrac{\sqrt{5}}{3}\underbrace{xy^2z^4}_{\text{κύριο μέρος}}, \quad 3\sqrt{2}\underbrace{x^2y}_{\text{κύριο μέρος}}$

- **Βαθμός του μονωνύμου** ως προς μία μεταβλητή λέγεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.
  π.χ. το μονώνυμο $-7\alpha^2\beta\gamma^4$
  - ως προς τη μεταβλητή α είναι $2^{ου}$ βαθμού
  - ως προς τη μεταβλητή β είναι $1^{ου}$ βαθμού
  - ως προς τη μεταβλητή γ είναι $4^{ου}$ βαθμού

- **Βαθμός του μονωνύμου** ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.
  π.χ. ο βαθμός του μονωνύμου $-7\alpha^2\beta\gamma^4$ ως προς όλες τις μεταβλητές του είναι 7, αφού $2+1+4=7$

- **Όμοια μονώνυμα** λέγονται αυτά που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.
  π.χ. τα μονώνυμα $-5\alpha^2\beta\gamma^4$, $\frac{2}{3}\alpha^2\beta\gamma^4$, $-\sqrt{7}\alpha^2\beta\gamma^4$, $\alpha^2\beta\gamma^4$ είναι όμοια.

- **Ίσα μονώνυμα** λέγονται τα μονώνυμα που είναι όμοια και έχουν τον ίδιο συντελεστή.

- **Αντίθετα μονώνυμα** λέγονται τα μονώνυμα που είναι όμοια και έχουν αντίθετους συντελεστές.
  π.χ. τα μονώνυμα $\frac{5}{6}\alpha^2\beta\gamma^4$, $-\frac{5}{6}\alpha^2\beta\gamma^4$ είναι αντίθετα μονώνυμα.

- **Σταθερό μονώνυμο** λέγεται ο οποιοσδήποτε αριθμός.
  π.χ. οι αριθμοί $-\frac{3}{4}$ και 2 είναι σταθερά μονώνυμα.

- **Μηδενικό μονώνυμο** λέγεται το σταθερό μονώνυμο 0.

- Για το μηδενικό μονώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.
  Για το σταθερό μονώνυμο, που δεν είναι το μηδενικό μονώνυμο, ορίζεται ως βαθμός το μηδέν.
  π.χ. τα μονώνυμα -5, $\frac{3}{4}$ έχουν βαθμό 0.

- Το **άθροισμα όμοιων μονωνύμων** είναι ένα μονώνυμο που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών και ίδιο κύριο μέρος.
  π.χ. $3x^2y-5x^2y+x^y=(3-5+1)x^2y=x^2y$

- Το **γινόμενο μονωνύμων** είναι ένα μονώνυμο που έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη σε κάθε μεταβλητή το άθροισμα των εκθετών της.
  π.χ. $6\alpha\beta^2\cdot\frac{3}{2}\alpha x\cdot(-\beta)=\left(6\cdot\frac{3}{2}\cdot(-1)\right)\alpha^{1+1}\beta^{2+1}x=-9\alpha^2\beta^3x$

- **Πολυώνυμο** λέγεται το άθροισμα δύο η περισσότερων ανόμοιων μονωνύμων.
  π.χ. $3x^2-2x+5$ και $5\alpha^2\beta+\alpha\beta$ είναι πολυώνυμα.

- **Όρος ενός πολυωνύμου** λέγεται κάθε μονώνυμο απ' τα οποία αυτό αποτελείται.
  π.χ. $\underbrace{3x^2}_{\text{όρος}}\underbrace{-2x}_{\text{όρος}}\underbrace{+5}_{\text{όρος}}$, $\underbrace{-5\alpha^2\beta}_{\text{όρος}}\underbrace{+\alpha\beta}_{\text{όρος}}$

- **Αναγωγή ομοίων όρων** σε μία αλγεβρική παράσταση λέγεται η διαδικασία της αντικατάστασης των όμοιων όρων της με το άθροισμά τους.

- Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα** πολλαπλασιάζουμε τον κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου.

- Για να **πολλαπλασιάσουμε τρία πολυώνυμα** πολλαπλασιάζουμε τα δύο πρώτα πολυώνυμα μεταξύ τους και αυτό που θα προκύψει (μετά την αναγωγή ομοίων όρων) με το τρίτο.

Ταυτότητες

calculator.gr

- **Ταυτότητα** λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

- **Βασικές Ταυτότητες**

  $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ (τετράγωνο αθροίσματος)

  $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ (τετράγωνο διαφοράς)

  $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$ (τετράγωνο αθροίσματος τριών όρων)

  $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ (κύβος αθροίσματος)

  $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ (κύβος διαφοράς)

  $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ (διαφορά τετραγώνων)

  $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ (διαφορά κύβων)

  $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ (άθροισμα κύβων)

- **Χρήσιμες Ταυτότητες**

  $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

  $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

  $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

Προτεραιότητα πράξεων στις αριθμητικές παραστάσεις

calculator.gr

Για τον υπολογισμό της τιμής μιας αριθμητικής παράστασης εκτελούμε τις πράξεις με την ακόλουθη σειρά:

1. Πρώτα απ’ όλα, τρέπουμε τους μεικτούς σε κλάσματα, κάνουμε τα σύνθετα κλάσματα απλά και απλοποιούμε τα κλάσματα.
2. Αν δεν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε
   α’) τις δυνάμεις και τις ρίζες
   β’) τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις (από αριστερά προς τα δεξιά)
   γ’) τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις (από αριστερά προς τα δεξιά).
3. Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.

Πρωτοβάθμια εξίσωση

calculator.gr

- **Πρωτοβάθμια Εξίσωση** λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta=0$
- **Επίλυση** Πρωτοβάθμιας Εξίσωσης
  - αν $\alpha\neq 0$ τότε υπάρχει μοναδική λύση $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$
  - αν $\alpha=0$ και $\beta=0$ τότε κάθε πραγματικός αριθμός είναι λύση (λέγεται ταυτότητα)
  - αν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$ τότε δεν υπάρχει λύση (λέγεται αδύνατη)
- Οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις έχουν <u>ακριβώς μία λύση</u>, <u>καμία λύση</u> ή <u>κάθε (επιτρεπτό) αριθμό ως λύση</u>.

Παραγοντοποίηση

calculator.gr

- **Παραγοντοποίηση** μιας αλγεβρικής παράστασης λέγεται η διαδικασία μετατροπής της από άθροισμα σε γινόμενο.
- **Μέθοδοι Παραγοντοποίησης**
  1. Εξαγωγή κοινού παράγοντα
  2. Διαφορά Τετραγώνων - Διαφορά Κύβων - Άθροισμα Κύβων
  3. Θεωρία τριωνύμου
  4. Προσεκτική εξέταση μήπως είναι ανάπτυγμα τετραγώνου ή κύβου
  5. Ομαδοποίηση και ακολούθως εφαρμογή μιας εκ των παραπάνω μεθόδων
- **Χρησιμότητα**: Στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου του δύο.

Δευτεροβάθμια εξίσωση

calculator.gr

- **Δευτεροβάθμια Εξίσωση** λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$
- **Διακρίνουσα** της παραπάνω Δευτεροβάθμιας Εξίσωσης λέμε την ποσότητα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
- **Επίλυση** Δευτεροβάθμιας Εξίσωσης
  - αν $\Delta > 0$ τότε υπάρχουν δύο άνισες ρίζες (λύσεις) $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
  - αν $\Delta = 0$ τότε υπάρχει μία διπλή ρίζα $x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
  - αν $\Delta < 0$ τότε δεν υπάρχει λύση (λέγεται αδύνατη)
- Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις έχουν ακριβώς δύο λύσεις, μία διπλή λύση ή καμία λύση.

Τριώνυμο

calculator.gr

- **Τριώνυμο**, δευτέρου βαθμού, λέγεται κάθε αλγεβρική παράσταση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$
- **Παραγοντοποίηση τριωνύμου**
  - Αν $\Delta > 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$, όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του τριωνύμου.
  - Αν $\Delta = 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)^2$, όπου ρ η (διπλή) ρίζα του τριωνύμου.
  - Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

Χρήσιμες Ιδιότητες στη επίλυση εξισώσεων

calculator.gr

- $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_\nu = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1 = 0 \;\vee\; \alpha_2 = 0 \;\vee\; \ldots \;\vee\; \alpha_\nu = 0)$
- $\alpha^\nu = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ (όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$)
- $\dfrac{\alpha}{\beta} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ (όπου $\beta \neq 0$)

Κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις
calculator.gr

- **Κλασματική Αλγεβρική Παράσταση** λέγεται κάθε αλγεβρική παράσταση που περιέχει μεταβλητή σε έναν τουλάχιστον παρονομαστή. π.χ. $\frac{3}{x-2}$, $1-\frac{\alpha}{2}+\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+3}$
- Μία Κλασματική Αλγεβρική Παράσταση ορίζεται για εκείνες τις τιμές των μεταβλητών που δεν μηδενίζουν κανέναν παρονομαστή που εμφανίζεται σε αυτή.
- Για να απλοποιήσουμε μία Κλασματική Αλγεβρική Παράσταση παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή και στη συνέχεια διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της.

Κλασματικές Εξισώσεις
calculator.gr

- **Κλασματική Εξίσωση** λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει άγνωστο σε έναν τουλάχιστον παρονομαστή. π.χ. $\frac{3}{x-1}-\frac{1+2x}{x+1}=2$, $\frac{1}{3}=\frac{2}{x}-\frac{2x}{5}$
- **Επίλυση Κλασματικής Εξίσωσης**
  1. Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές
  2. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών
  3. Βρίσκουμε τις ρίζες όλων των παρονομαστών (είναι οι ρίζες των βάσεων όλων των δυνάμεων που εμφανίζονται στο Ε.Κ.Π.)
  4. Γράφουμε τους περιορισμούς
  5. Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της κλασματικής εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών
  6. Απαλείφουμε παρονομαστές
  7. Συνεχίζουμε με μεθόδους, επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων, που ήδη γνωρίζουμε

Ιδιότητες Ανισοτήτων
calculator.gr

- $\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma}$ και $\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\gamma>\beta-\gamma}$
- Αν $\gamma>0$ τότε: $\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma}$ και $\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\gamma}}$
- Αν $\gamma<0$ τότε: $\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma<\beta\gamma}$ και $\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}<\frac{\beta}{\gamma}}$
- $\boxed{(\alpha>\beta \quad \wedge \quad \beta>\gamma) \Rightarrow \alpha>\gamma}$ (μεταβατική)
- $\boxed{\alpha,\beta \text{ ομόσημοι } \Leftrightarrow \alpha\beta>0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}>0}$
- $\boxed{\alpha,\beta \text{ ετερόσημοι } \Leftrightarrow \alpha\beta<0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}<0}$
- $\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha<\beta\\ \gamma<\delta\end{array}\right\} \overset{\oplus}{\Rightarrow} \alpha+\gamma<\beta+\delta}$ (πρόσθεση κατά μέλη)

- $\boxed{\left.\begin{array}{l} 0 \le \alpha < \beta \\ 0 \le \gamma < \delta \end{array}\right\} \overset{\odot}{\Rightarrow} \alpha\gamma < \beta\delta}$ (πολλαπλασιασμός κατά μέλη)

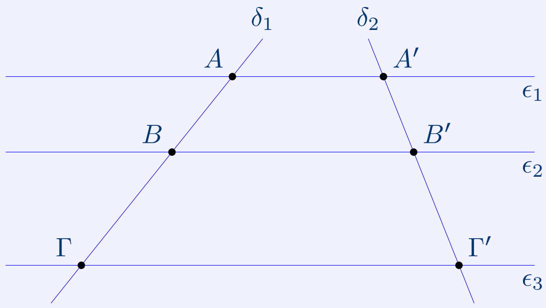
- Αν α, β ομόσημοι τότε: $\boxed{\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}}$

- Αν α, β ετερόσημοι τότε: $\boxed{\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ calculator.gr

Θεώρημα ΘΑΛΗ: Όταν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες τότε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται στη μια ευθεία είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται στην άλλη.

Δηλαδή $\boxed{\text{αν } \epsilon_1 // \epsilon_2 // \epsilon_3 \text{ τότε } \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}}$



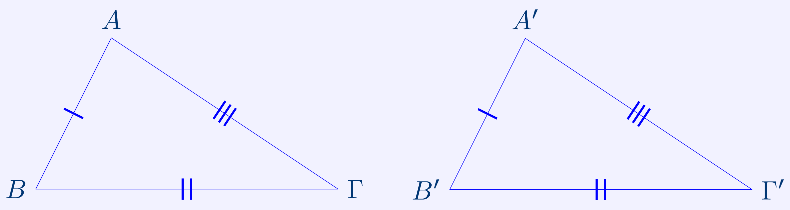
Ισότητα Τριγώνων calculator.gr

- **Ορισμός**: Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα όταν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους επίσης ίσες μία προς μία.

- Ακολουθούν τρία Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων και όλα προϋποθέτουν τουλάχιστον μία πλευρά του ενός ίση με μία πλευρά του άλλου.

Κριτήριο Π-Π-Π calculator.gr

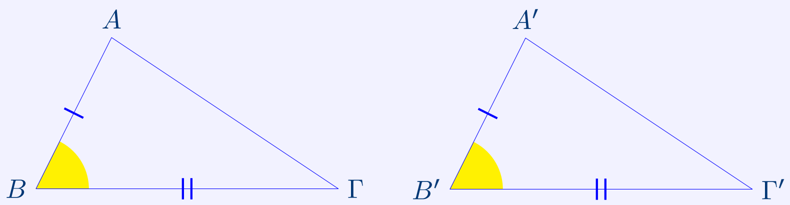
- **Κριτήριο Π-Π-Π**: Οι πλευρές του ενός είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές του άλλου.



Δηλαδή $\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ \Gamma A = \Gamma' A' \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}\Gamma = A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$

Κριτήριο Π-Γ-Π calculator.gr

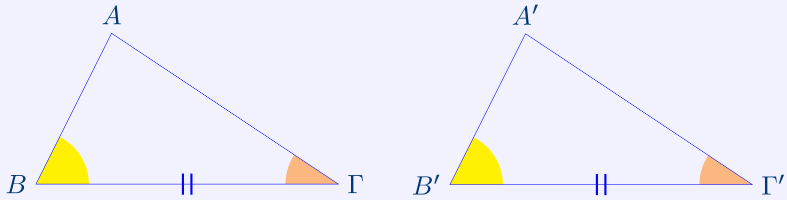
- **Κριτήριο Π-Γ-Π**: Δύο πλευρές του ενός είναι ίσες μία προς μία με δύο πλευρές του άλλου και οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.



Δηλαδή $\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}\Gamma = A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$

Κριτήριο Γ-Π-Γ calculator.gr

- **Κριτήριο Γ-Π-Γ**: Μία πλευρά του ενός είναι ίση με μία πλευρά του άλλου και οι προσκείμενες στη πλευρά αυτή γωνίες είναι μία προς μία ίσες.



Δηλαδή $\left.\begin{array}{l} B\Gamma = B'\Gamma' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}\Gamma = A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$

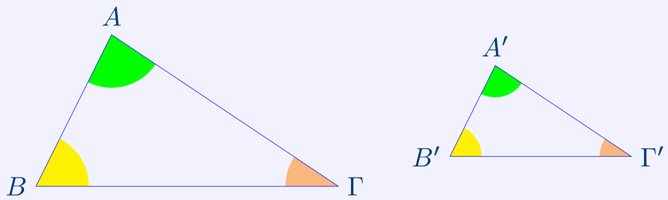
Ισότητα Ορθογωνίων Τριγώνων calculator.gr

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Μία πλευρά και μία οξεία γωνία του ενός ίσες με μία πλευρά και μία οξεία γωνία του άλλου τριγώνου.
- Δύο πλευρές του ενός είναι ίσες με δύο πλευρές του άλλου τριγώνου.

Ομοιότητα Τριγώνων calculator.gr

Ορισμός: Δύο τρίγωνα λέγονται όμοια όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

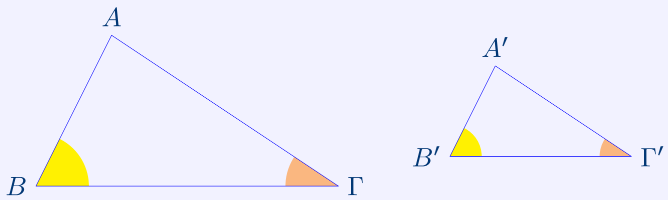


$$A\overset{\triangle}{B}\Gamma \sim A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma' \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{\Gamma A}{\Gamma' A'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} \end{array}\right.$$

Λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων ονομάζεται ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών τους.

1ο Κριτήριο Ομοιότητας Τριγώνων calculator.gr

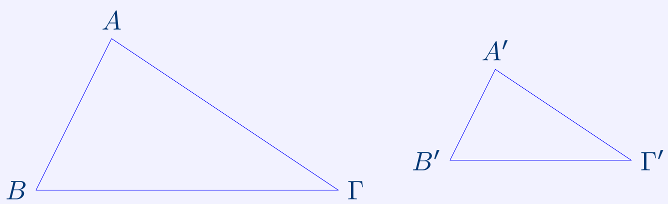
- **Κριτήριο 1**: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.



Δηλαδή $\left.\begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}\Gamma \sim A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$

2ο Κριτήριο Ομοιότητας Τριγώνων calculator.gr

- **Κριτήριο 2**: Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.



Δηλαδή $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{\Gamma A}{\Gamma' A'} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}\Gamma \sim A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$

Όμοια Πολύγωνα

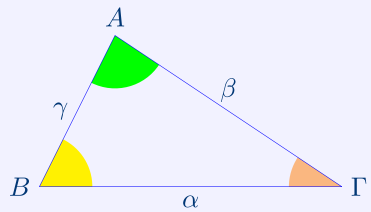
calculator.gr

- **Δύο πολύγωνα λέγονται όμοια** όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.
- **Λόγος ομοιότητας** δύο όμοιων πολυγώνων λέγεται ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών τους.
- Ο **λόγος των περιμέτρων** δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.
- Ο **λόγος των εμβαδών** δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Νόμος των Ημιτόνων

calculator.gr

Νόμος των Ημιτόνων
Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές του είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών τους. Δηλαδή $\boxed{\dfrac{\alpha}{\text{ημ}\,\widehat{A}} = \dfrac{\beta}{\text{ημ}\,\widehat{B}} = \dfrac{\gamma}{\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}}}$

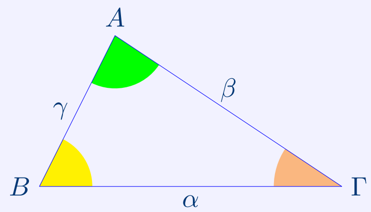


Νόμος των Συνημιτόνων

calculator.gr

Νόμος των Συνημιτόνων
Το τετράγωνο κάθε πλευράς τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενό των πλευρών αυτών επί το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας.
Δηλαδή $\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}\,\widehat{A}}$

Αντιστοίχως $\boxed{\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\text{συν}\,\widehat{B}}$ $\boxed{\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\text{συν}\,\widehat{\Gamma}}$

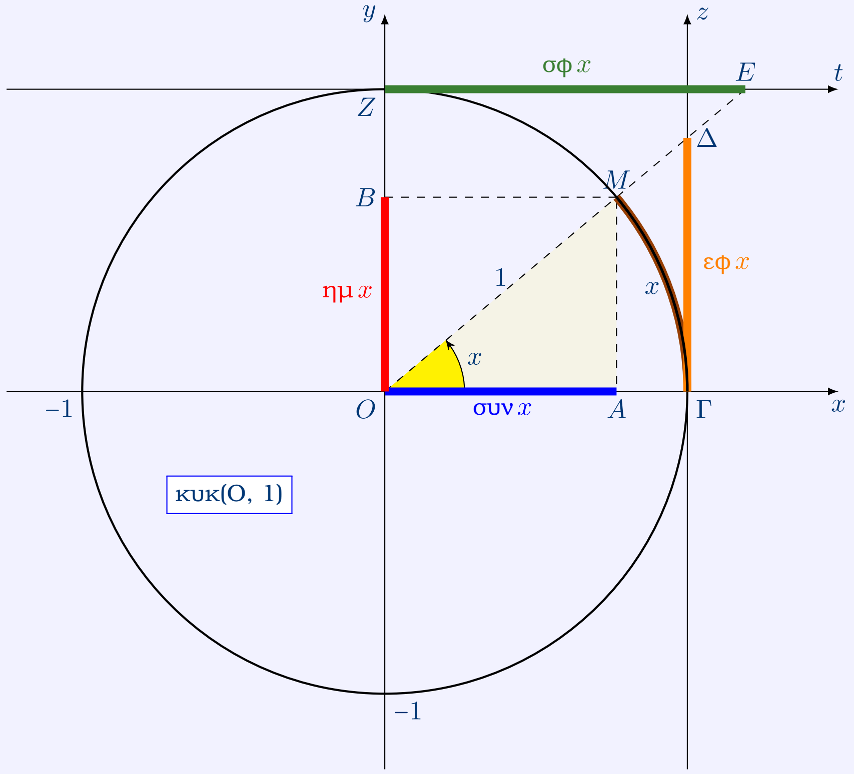


Παρατηρήσεις

- Αν $\widehat{A} = 90^\circ$ έπεται $\text{συν}\,\widehat{A} = 0$ οπότε προκύπτει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
- Αν σε ένα τρίγωνο γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία, τότε μπορούμε να βρούμε και την τρίτη πλευρά.
- Αν σε ένα τρίγωνο γνωρίζουμε όλες τις πλευρές του, τότε μπορούμε να βρούμε όλες τις γωνίες του.

Τριγωνομετρικός κύκλος - Τριγωνομετρικοί αριθμοί

calculator.gr



συνήθεις τριγωνομετρικοί αριθμοί					
ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
μοίρες	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
ημ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
σφ	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- **Τριγωνομετρικοί Αριθμοί**

  ημίτονο
  $\text{ημ}\,x \;/ x \in \mathbb{R}$

  συνημίτονο
  $\text{συν}\,x \;/ x \in \mathbb{R}$

  εφαπτομένη
  $\text{εφ}\,x \;/ x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2} : \kappa \in \mathbb{Z}\}$

- **Τιμές** τριγωνομετρικών αριθμών

  $-1 \le \text{ημ}\,x \le 1$

  $-1 \le \text{συν}\,x \le 1$

  $-\infty < \text{εφ}\,x < +\infty$

- **Παραπληρωματικών γωνιών** τριγωνομετρικοί αριθμοί

  $\text{ημ}\,(\pi - x) = \text{ημ}\,x$

  $\text{συν}\,(\pi - x) = -\,\text{συν}\,x$

  $\text{εφ}\,(\pi - x) = -\,\text{εφ}\,x$

- **Τριγωνομετρικές Ταυτότητες**

  – $\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x = (OB)^2 + (OA)^2 = (AM)^2 + (OA)^2 = (OM)^2 = 1^2 = 1$ άρα $\boxed{\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x = 1}$

  – Επομένως $\text{ημ}^2 x = 1 - \text{συν}^2 x$ και $\text{συν}^2 x = 1 - \text{ημ}^2 x$

  – $\left(\widehat{O} \text{ κοινή}, \widehat{\Gamma} = \widehat{A} = 90°\right) \Rightarrow \overset{\triangle}{O\Gamma\Delta} \sim \overset{\triangle}{OAM} \Rightarrow \frac{\Gamma\Delta}{AM} = \frac{O\Gamma}{OA} \Leftrightarrow \frac{\text{εφ}\,x}{\text{ημ}\,x} = \frac{1}{\text{συν}\,x}$ άρα $\boxed{\text{εφ}\,x = \frac{\text{ημ}\,x}{\text{συν}\,x}}$

Γραμμικά συστήματα εξισώσεων

calculator.gr

- **Γραμμική εξίσωση** με 2 αγνώστους λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, όπου $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$. Τα α,β λέγονται συντελεστές των αγνώστων x,y αντιστοίχως και το γ σταθερός όρος.

- **Γραμμικό σύστημα** 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους λέγεται κάθε σύστημα που έχει τη μορφή

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \end{cases}$$

- κάθε γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει :
  - ακριβώς μία λύση
  - καμία λύση και λέγεται **αδύνατο**
  - άπειρες λύσεις και λέγεται **αόριστο**
- Για την αλγεβρική επίλυσή του εφαρμόζουμε 2 μεθόδους :
  - της αντικατάστασης
  - των αντίθετων συντελεστών
- **Μέθοδος αντικατάστασης**:
  1. επιλύουμε την μία εκ των δύο εξισώσεων ως προς τον έναν άγνωστο, θεωρώντας τον άλλον γνωστό.
  2. την έκφραση που βρήκαμε την τοποθετούμε στην θέση του αγνώστου-ως προς τον οποίο λύσαμε- στην άλλη εξίσωση, οπότε προκύπτει μία εξίσωση με έναν άγνωστο.
  3. λύνουμε την εξίσωση, του ενός αγνώστου.
  4. τοποθετούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στην έκφραση που είχαμε βρει αρχικά και προκύπτει μία εξίσωση ενός αγνώστου, την οποία λύνουμε βρίσκοντας και τον άλλον άγνωστο.
- **Μέθοδος αντίθετων συντελεστών**:
  1. βρίσκουμε δύο κατάλληλους αριθμούς με τους οποίους θα πολλαπλασιάσουμε τους τρεις όρους κάθε μίας εκ των δύο εξισώσεων, τέτοιους ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές για τον έναν από τους δύο αγνώστους.
  2. προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις που προέκυψαν και παίρνουμε έτσι μία εξίσωση ενός αγνώστου, την οποία λύνουμε.
  3. επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία δημιουργώντας αντίθετους συντελεστές για τον άλλον άγνωστο.
- **Σημαντικές Επισημάνσεις** πριν την εφαρμογή οποιασδήποτε μεθόδου
  - ενδέχεται να χρειαστούν πράξεις (όπως να βγουν παρενθέσεις, να απαλοιφούν παρονομαστές και να γίνουν αναγωγές ομοίων όρων) για να έρθει το σύστημα στη απλή μορφή που αναφέραμε όταν το ορίσαμε.
  - για κάθε εξίσωση, χωριστά, βρίσκουμε το ΕΚΠ των συντελεστών και του σταθερού όρου της και διαιρούμε όλους τους όρους αυτής με το ΕΚΠ, ώστε να προκύψουν μικρότεροι συντελεστές.
  - ίσως χρειαστεί να αλλάξουμε τα πρόσημα, όλων των όρων, της μίας εκ των δύο εξισώσεων, ώστε σε συνδυασμό με το προηγούμενο βήμα να δούμε μήπως καταλήξουμε :
    * σε δύο ίδιες εξισώσεις, οπότε το σύστημα θα εκφυλιστεί σε μία εξίσωση δύο αγνώστων με άπειρες λύσεις (σύστημα αόριστο), που καλούμαστε να βρούμε, λύνοντας ως προς τον έναν άγνωστο, θεωρώντας τον άλλον γνωστό.
    * σε προφανή αδυναμία, οπότε σταματάμε, λέγοντας ότι το σύστημα δεν έχει λύσεις (σύστημα αδύνατο).

Αποδείξεις Θεωρημάτων

Αποδείξεις Ταυτοτήτων

calculator.gr

1. Να αποδειχθεί η ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)\\ &= \alpha\alpha+\beta\alpha+\alpha\beta+\beta\beta\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

άρα $\boxed{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$

2. Να αποδειχθεί η ταυτότητα $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2 &= (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)\\ &= \alpha\alpha-\beta\alpha-\alpha\beta+\beta\beta\\ &= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

άρα $\boxed{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$

3. Να αποδειχθεί η ταυτότητα $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) &= \alpha\alpha-\cancel{\beta\alpha}+\cancel{\alpha\beta}-\beta\beta\\ &= \alpha^2-\beta^2\end{aligned}$$

άρα $\boxed{\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}$

4. Να αποδειχθεί η ταυτότητα $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)\\ &= (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)\\ &= \alpha^2\alpha+2\alpha\beta\alpha+\beta^2\alpha+\alpha^2\beta+2\alpha\beta\beta+\beta^2\beta\\ &= \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\end{aligned}$$

άρα $\boxed{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}$

5. Να αποδειχθεί η ταυτότητα $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^3 &= (\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)\\ &= (\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha-\beta)\\ &= \alpha^2\alpha-2\alpha\beta\alpha+\beta^2\alpha-\alpha^2\beta+2\alpha\beta\beta-\beta^2\beta\\ &= \alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3\\ &= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3\end{aligned}$$

άρα $\boxed{(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$

6. Να αποδειχθεί η ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) &= \alpha\alpha^2-\alpha\alpha\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\beta\alpha\beta+\beta\beta^2\\ &= \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3-\cancel{\alpha^2\beta}+\cancel{\alpha\beta^2}+\cancel{\beta\alpha^2}-\cancel{\alpha\beta^2}+\beta^3\\ &= \alpha^3+\beta^3\end{aligned}$$

άρα $\boxed{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}$

7. Να αποδειχθεί η ταυτότητα $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

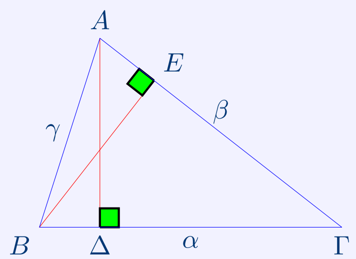
Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) &= \alpha\alpha^2+\alpha\alpha\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\beta\alpha\beta-\beta\beta^2\\ &= \alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3\\ &= \alpha^3+\cancel{\alpha^2\beta}+\cancel{\alpha\beta^2}-\cancel{\beta\alpha^2}-\cancel{\alpha\beta^2}-\beta^3\\ &= \alpha^3-\beta^3\end{aligned}$$

άρα $\boxed{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$

Απόδειξη του Νόμου Ημιτόνων

calculator.gr



Νόμος των Ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές του είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών τους. Δηλαδή $\boxed{\dfrac{\alpha}{\text{ημ}\,\widehat{A}}=\dfrac{\beta}{\text{ημ}\,\widehat{B}}=\dfrac{\gamma}{\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}}}$.

Απόδειξη:

Φέρνουμε το ύψος $A\Delta$.

$$\left(A\overset{\triangle}{\Delta}B\,,\,\widehat{\Delta}=90^\circ\right)\Rightarrow \text{ημ}\,\widehat{B}=\frac{A\Delta}{AB}\Rightarrow A\Delta=AB\cdot\text{ημ}\,\widehat{B}\quad (1)$$

$$\left(A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma\,,\,\widehat{\Delta}=90^\circ\right)\Rightarrow \text{ημ}\,\widehat{\Gamma}=\frac{A\Delta}{A\Gamma}\Rightarrow A\Delta=A\Gamma\cdot\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}\quad (2)$$

$$(1),\,(2)\Rightarrow AB\cdot\text{ημ}\,\widehat{B}=A\Gamma\cdot\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}\Rightarrow\frac{AB\cdot\cancel{\text{ημ}\,\widehat{B}}}{\cancel{\text{ημ}\,\widehat{B}}\cdot\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}}=\frac{A\Gamma\cdot\cancel{\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}}}{\text{ημ}\,B\cdot\cancel{\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}}}\Rightarrow\frac{AB}{\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}}=\frac{A\Gamma}{\text{ημ}\,\widehat{B}}\quad (3)$$

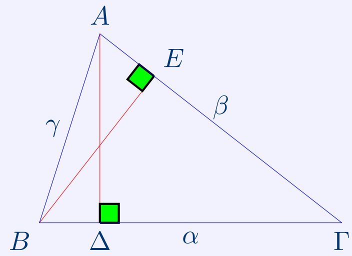
Φέρνουμε το ύψος BE.

Ομοίως από τα $A\overset{\triangle}{E}B$, $B\overset{\triangle}{E}\Gamma$ με $\widehat{E}=90^\circ$ παίρνουμε $\dfrac{AB}{\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}}=\dfrac{B\Gamma}{\text{ημ}\,\widehat{A}}\quad (4)$

$(3),(4)\Rightarrow \dfrac{AB}{\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}}=\dfrac{A\Gamma}{\text{ημ}\,\widehat{B}}=\dfrac{B\Gamma}{\text{ημ}\,\widehat{A}}$ Δηλαδή $\boxed{\dfrac{\gamma}{\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}}=\dfrac{\beta}{\text{ημ}\,\widehat{B}}=\dfrac{\alpha}{\text{ημ}\,\widehat{A}}}$

Απόδειξη του Νόμου Συνημιτόνων

calculator.gr



Νόμος των Συνημιτόνων
Το τετράγωνο κάθε πλευράς τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενό των πλευρών αυτών επί το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας.

Δηλαδή $\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}\,\widehat{A}}$

Απόδειξη:
Φέρνουμε το ύψος $B\Delta$.

$B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ (Π.Θ. $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma, \widehat{\Delta} = 90^\circ$)

Ομοίως $B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2$ (Π.Θ. $A\overset{\triangle}{B}\Delta, \widehat{\Delta} = 90^\circ$)

Άρα $B\Gamma^2 = AB^2 - A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ (1)

$\Delta\Gamma = A\Gamma - A\Delta \Rightarrow \Delta\Gamma^2 = (A\Gamma - A\Delta)^2 \Rightarrow \Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 - 2\cdot A\Gamma\cdot A\Delta + A\Delta^2$

$\left(A\overset{\triangle}{B}\Delta\,,\,\widehat{\Delta} = 90^\circ\right) \Rightarrow \text{συν}\,\widehat{A} = \dfrac{A\Delta}{AB} \Rightarrow A\Delta = AB\cdot\text{συν}\,\widehat{A}$

Άρα $\Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 - 2\cdot A\Gamma\cdot AB\cdot\text{συν}\,\widehat{A} + A\Delta^2$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow B\Gamma^2 = AB^2 - \cancel{A\Delta^2} + A\Gamma^2 - 2\cdot A\Gamma\cdot AB\cdot\text{συν}\,\widehat{A} + \cancel{A\Delta^2}$

Επομένως $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - 2\cdot A\Gamma\cdot AB\cdot\text{συν}\,\widehat{A}$

Δηλαδή $\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}\,\widehat{A}}$